



TITLE:

# SO(5)対称性と高温超伝導(第43回物性若手夏の学校(1998年度),講義ノート)

AUTHOR(S):

小山, 富男

---

CITATION:

小山, 富男. SO(5)対称性と高温超伝導(第43回物性若手夏の学校(1998年度),講義ノート). 物性研究 1998, 71(3): 473-483

ISSUE DATE:

1998-12-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/96489>

RIGHT:

## SO(5) 対称性と高温超伝導

東北大学金属材料研究所

小山富男

高  $T_c$  を示す  $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ ,  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ ,  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$  等の一群の高温超伝導体は、層状ペロブスカイトと呼ばれる結晶構造を持っている。これらの超伝導体は、すべて  $CuO_2$  という組成の層状の2次元面を含んでおり、この層に一定量の電子ないし正孔(キャリア)がドーピングされると超伝導が発現すると考えられている。このようなキャリアドーピングは、La-系では La の一部を Sr ないし Ba で置換することにより、また、Y-系や Bi-系の場合はアニールして酸素量を調整することで達成される。キャリアを含まない  $CuO_2$  層内の、Cu と O イオンは、それぞれ  $Cu^{2+}$  ( $d^9$ ),  $O^{2-}$  ( $p^6$ ) の電子配置を取る。この配置は、バンド理論の立場では half-filled になり、良い金属となるはずであるが、実際には絶縁体になっている。この絶縁体状態では、反強磁性磁気秩序も出現する。この系のスピンは、局在スピン系として、Heisenberg モデルでよく記述できることも知られている。このようなバンド理論の破綻は、強い電子相関に起因する。このように強い電子相関により絶縁体になっている絶縁体を Mott 絶縁体と呼ぶ。

図1に、ホールドーピング系高温超伝導体の典型的な相図の概略を示す。図に示されているように、この系の Neel 温度は、ホールドーピングにより低下し、反強磁性磁気秩序は急速に不安定化する。超伝導秩序は反強磁性長距離秩序が消失したホール濃度領域で出現する。超伝導秩序が現れる領域の正常状態は金属状態になっている。しかし、maximum  $T_c$  を与えるホール濃度以下の underdope 領域の金属相は、典型的な金属とは言い難く、異常金属相とも呼ばれるが、物理量にかなり異常な振る舞いが現れることが知られている。この領域の研究は、高温超伝導の発現機構を解明する上できわめて重要である。

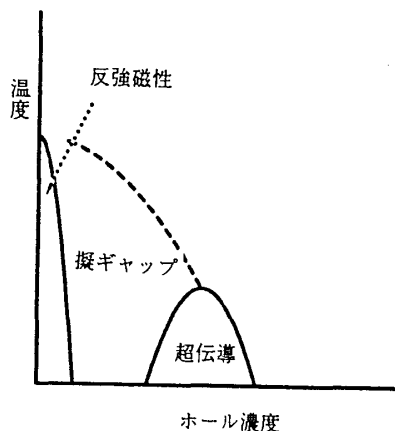


Fig.1 高温超伝導体の相図

高温超伝導体における反強磁性と超伝導は同一の強相関電子系で起きている。このことから、この系の反強磁性磁気秩序と超伝導秩序の間には、強い相互作用が存在すると考えてよいであろう。通常系では、磁気秩序は  $SO(3)$  で<sup>1)</sup>、また、超伝導秩序は、 $U(1)$  で変換する秩序パラメーターで記述される。したがって、磁性と超伝導が競合する系のギンツブルグランダウ自由エネルギーは、 $SO(3) \times U(1)$  の変換に対して不変となるように、 $SO(3)$  で変換する磁気秩序パラメーターと  $U(1)$  で変換する超伝導秩序パラメーターを組み合わせで表現されることになる。これに対して、Zhan は、高温超伝導体のように反強磁性と超伝導の間に強い相関を持ち、反発し合う single band 系の秩序状態は、1 種類の秩序パラメーターで記述できるのではないかとすることを提案している<sup>2)</sup>。すなわち、この秩序パラメーターの張る空間は、反強磁性秩序に対応する 3 次元空間と超伝導に対応する 2 次元空間<sup>3)</sup> の直和になっていて、この空間内のベクトルが、反強磁性秩序と超伝導秩序を統一的に記述する秩序パラメーターだと考えるのである。従って、この場合の秩序パラメーターは、5 成分を持ち、 $SO(5)$  の回転の下でベクトルとして変換するものとする。このような記述を可能とする低エネルギーの有効理論として、Zhan は以下のような量子論的記述を提案している。

反強磁性のスピン演算子を電子の生成消滅演算子  $c_p = (c_{p\uparrow}, c_{p\downarrow})^t$ ,  $c_p^\dagger = (c_{p\uparrow}^\dagger, c_{p\downarrow}^\dagger)$  を用いて次のように表現することができる。

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_p c_{p+Q}^\dagger \sigma_x c_p \\ M_y &= \sum_p c_{p+Q}^\dagger \sigma_y c_p \\ M_z &= \sum_p c_{p+Q}^\dagger \sigma_z c_p \end{aligned}$$

ただし、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  は Pauli 行列、 $Q$  は反強磁性秩序の周期を与える波数である。この演算子の期待値は、反強磁性秩序パラメーターに取ることができることに注意。また、Cooper 対の生成消滅させる演算子は、 $d_{x^2-y^2}$  波超伝導体の場合

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} \sum_p (\cos p_x - \cos p_y) c_{p\uparrow} c_{-p\downarrow} \\ \Delta^\dagger &= \frac{1}{2} \sum_p (\cos p_x - \cos p_y) c_{-p\downarrow}^\dagger c_{p\uparrow}^\dagger \end{aligned}$$

となる。ここで、これらの 5 つの演算子をまとめて次のような 5 成分からなる演算子を考えよう。

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta + \Delta^\dagger \\ M_x \\ M_y \\ M_z \\ -i(\Delta - \Delta^\dagger) \end{pmatrix} \quad (1)$$

すなわち、この演算子の2、3、4成分の期待値は反強磁性秩序パラメーターを、また、1、5成分の期待値は、それぞれ超伝導秩序パラメーターの実部と虚部を与える演算子の組み合わせになっている。Zhan は、この演算子を、 $SO(5)$  のベクトルと見なせることを示した。すなわち、演算子  $n$  を  $SO(5)$  で回転させる10個の生成子  $L_{ab}$  ( $L_{12}, L_{13}, \dots, L_{45}, L_{ab} = -L_{ba}$ ) を作って見せた。

$$\exp\left[i\sum_{a<b}\theta_{ab}L_{ab}\right]n_i\exp\left[-i\sum_{a<b}\theta_{ab}L_{ab}\right]=\sum_j\left[SO(5)\right]_{ij}n_j \quad (2)$$

ここで、 $\theta_{ab}$  は、 $ab$ -面内での回転角に対応するパラメーターである。また、上式右辺の行列  $[SO(5)]$  は、 $SO(5)$  の5次元表現を与える特殊直交行列である。座標軸  $x_1x_2x_3$  で張られる3次元空間内の回転は、スピン軸の回転に対応するので、生成子  $L_{23}, L_{34}, L_{42}$  は、全スピン演算子  $\sum_p c_p^\dagger \sigma c_p$  に一致するであろう。また、 $x_1x_5$ -面内の回転は、位相変換  $U(1)$  を与えるので、この変換の生成子  $L_{15}$  は、全粒子数演算子  $\sum_p c_p^\dagger c_p$  となるはずである。10個の生成子のうち4つはこのようになじみ深い演算子となっている。このほかの6個の生成子  $L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{25}, L_{35}, L_{45}$  は、演算子

$$\pi_\alpha^\dagger = \sum_p (\cos p_x - \cos p_y) c_{p+Q}^\dagger (\sigma^\alpha \sigma_2) c_{-p}^\dagger, \quad \pi = (\pi^\dagger)^\dagger \quad (3)$$

を用いて、 $L_{1\alpha} = -(\pi_\alpha^\dagger + \pi_\alpha)$   $L_{\alpha 5} = i(\pi_\alpha^\dagger - \pi_\alpha)$  のように表されることが示された。この生成子は、電子系を超伝導状態から反強磁性状態に回転させる演算子と解釈でき、 $SO(5)$  の対称性を仮定することで初めて現れる変換である。この演算子は、 $t-J$  モデルなどの高温超伝導体に対するモデルハミルトニアン of 近似的な固有演算子になっているという主張もある。生成子  $L_{ab}$  がエルミート演算子であることから、この生成子を用いて、系の有効ハミルトニアンを構成することもできる。例えば、秩序パラメーターを5次元空間内の回転子と見なせば、系の運動エネルギーは、

$$T \sim \frac{1}{\chi} \sum_{a<b} L_{ab}^2 \quad (4)$$

の形の回転エネルギーとなるであろう。また、ポテンシャルエネルギーは、(1) で与えられる演算子  $n$  で表現できるであろう。しかし、場の理論として定式化するにはこのままでは複雑すぎて便利ではない。そこで、秩序パラメーターを与える (1) の演算子を5次元空間の回転子に対応するボーズ場  $n(x)$  とみなせるとして、低エネルギーの長波長領域の有効理論をこのボーズ場で表現する。この場合、 $n_1(x)^2 + \dots + n_5^2(x) = 1$  の constraint がこのボーズ場に課されることになり、系のラグランジアンは、非線形シグマモデルの形になる。このボーズ場の期待値が有限で、 $x_2x_3x_4$ -空間を向いているとき、系は反強磁性状態、また、 $x_1x_5$ -面内

にある時には、超伝導状態と解釈される。現実の系では、 $SO(5)$  の対称性は  $SO(3) \times U(1)$  に explicit に破れている。この破れは異方性エネルギーによりもたらされだろう。half-filled で反強磁性状態が基底状態として現れることから、この異方性エネルギーは、反強磁性を安定化させる。また、ホールドープの効果は、反強磁性体に対する外部磁場によるスピントロップに類似した効果でもたらされると考える。すなわち、化学ポテンシャル項が外部磁場のように働き、秩序パラメーターに対応する擬スピンの反強磁性空間から超伝導空間にひっくり返ることが期待されるであろう。

このような Zhan の有効理論から重要な予言ができる。秩序パラメーターが5成分を持ち、秩序状態ではそのうちの1成分のみが0でないとすれば、4つのゴールドストーンモードが現れる。しかし、異方性がある場合、このうちのいくつかはギャップを持つモードとなる。例えば、反強磁性状態が出現する場合、通常のスピン波励起に対応するギャップレスの2つのゴールドストーンモードの他に、ギャップを持つ2つの位相モードが1軸と5軸方向に現れる。一方、超伝導状態では、ギャップレスモードは1つで<sup>4)</sup>、残りのモードはギャップを持つ3つのスピンモードを与える。このように、系の励起モードに明確な相違が現れる。

以上が、反強磁性と超伝導を  $SO(5)$  で統一的に記述する Zhan の理論のシナリオである。 $SO(5)$  は、物性の分野では必ずしもなじみのある群というわけではないと思われるので、以下に  $SO(5)$  の概略を、特に物理的な意味付けを意識して簡単にまとめておく。

- 1) 結晶の対称性は無視し、等方系を考えている。
- 2) S.C Zhan, Science 275, 1089 (1997)
- 3)  $U(1)$  と  $SO(2)$  は局所同型。
- 4) 長距離クーロン相互作用を考慮すると、この位相モードは、ギャップを持つプラズマモードになる。

### 群 $SO(5)$ について

$SO(5)$  は、5次元空間の回転群に対応する。5次元空間の点  $\mathbf{x}$  をデカルト座標、

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (\text{A.1})$$

で表そう。原点を中心とする回転により、点  $\mathbf{x}$  が点  $\mathbf{x}'$  に移る場合、5行5列の特殊直交行列  $U$  ( ${}^T U = U^{-1}$ ,  $\det U = 1$ ) を用いて

$$\mathbf{x}' = U\mathbf{x}, \quad (\text{A.2})$$

と表すことができる。この場合、行列  $U$  は、群  $SO(5)$  の元となっている。5次元空間には、互いに直交する 10 枚の座標平面、 $x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_4x_5$ -面を取ることができるので、この空間内の任意の回転は、これらの座標平面上での回転を合成することにより表わすことが可能である。この場合、 $x_ax_b$ -面上での回転角を  $\theta_{ab}$  と表すとき (A.2) の変換行列  $U$  は、10個の回転角  $\theta_{12}, \theta_{13}, \dots, \theta_{45}$  の関数として表現できることになる。さらに、 $SO(5)$  は、コンパクト<sup>1)</sup>で連結<sup>2)</sup>な線形リー群であるので、任意の元  $U$  は、

$$U(\theta_{12}, \dots, \theta_{45}) = \exp \sum_{a < b} \theta_{ab} X^{ab}, \quad (\text{A.3})$$

と表現できることが知られている。ただし、 $X_{ab}$  は、この場合、5行5列の実交代行列 ( $TX = -X$ ) である。ここで  $T^{ab} = -iX^{ab}$  となる行列を導入し、これを生成子 (generator) と呼ぶことにする。 $T^{ab}$  がエルミート行列になることに注意して、以下では  $X^{ab}$  の代わりに生成子  $T^{ab}$  を用いることにする。

$$U(\theta_{12}, \dots, \theta_{45}) = \exp i \sum_{a < b} \theta_{ab} T^{ab}. \quad (\text{A.4})$$

ここで、具体的に  $T^{ab}$  を求めてみよう。無限小変換 ( $\theta_{ab} \ll 1$ ) を仮定すると、(A.4) は、

$$U(\theta_{12}, \dots, \theta_{45}) \simeq 1 + i \sum_{a < b} \theta_{ab} T^{ab}. \quad (\text{A.5})$$

と近似できる。 $x_ax_b$ -面内の無限小回転が、

$$\begin{bmatrix} x'_a \\ x'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ab} & \sin \theta_{ab} \\ -\sin \theta_{ab} & \cos \theta_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \simeq \left\{ 1 + i\theta_{ab} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

と表されることに気が付けば、生成子  $T^{ab}$  が

$$T^{12} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T^{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dots, T^{45} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

すなわち、

$$(T^{ab})_{ij} = -i\delta_{ia}\delta_{jb} + i\delta_{ib}\delta_{ja}, \quad (\text{A.8})$$

と表現できることは容易に理解できるであろう。ここで、(A.8) を用いると 生成子の間の交換関係が次のように計算できる。

$$[T^{ab}, T^{cd}] = -i \left\{ \delta_{bc} T^{ad} - \delta_{ac} T^{bd} - \delta_{bd} T^{ac} + \delta_{ad} T^{bc} \right\}. \quad (A.9)$$

このように、

$$[X_a, X_b] = f_{ab}^c X_c, \quad (A.10)$$

の形の閉じた交換関係 ( $f_{ab}^c$  は構造定数) を満たす代数系を、リー代数と呼ぶ。コンパクトで連結な線形リー群の性質は、その生成子が満たすリー代数で完全に決定されることが知られている。そこで、(A.7) に与えた表現以外で交換関係 (A.9) を満たす演算子があれば  $SO(5)$  の異なる表現を与えることになる。(A.7) に与えた生成子は、ベクトル表現と呼ばれる表現であるが、これ以外の表現もちろん可能である。例えば、 $(X_a)_{ij} = f_{ai}^j$  のように、構造定数そのものを生成子の行列表現に選ぶ随伴表現がある<sup>3)</sup>。この表現は、リー代数の表現を調べるのに便利な表現であり、 $SO(5)$  の場合 10 次元表現となっている。以下にその他のいくつかの例を与える。

[1] 関数  $f(x_1, \dots, x_5)$  が (A.2) の座標回転で、 $f'(x'_1, \dots, x'_5)$  となるとしよう。

$$f'(x'_1, \dots, x'_5) = f(x_1 + \delta x_1, \dots, x_5 + \delta x_5) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^5 \delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) + \dots \quad (A.11)$$

無限小変換を仮定すれば、(A.5) から

$$\delta x_i = i \sum_{a < b} \theta_{ab} (T^{ab})_{ij} x_j, \quad (A.12)$$

となるから

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}') &= f(\mathbf{x}) - i \sum_{a < b} (-i) (x_a \partial_b - x_b \partial_a) f(\mathbf{x}) + \dots \\ &= \exp \left[ -i \sum_{a < b} \theta_{ab} (-i) (x_a \partial_b - x_b \partial_a) \right] f(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (A.13)$$

ここで、 $L^{ab} = -i(x_a \partial_b - x_b \partial_a)$  とすれば、この  $L^{ab}$  も (A.10) と同じ交換関係を満たすことは容易に確かめられる。すなわち、この微分演算子も  $SO(5)$  の生成子の 1 つの表現になっている。プランク定数  $\hbar$  を掛ければこの生成子は、5 次元版の軌道角運動量演算子という解釈ができるだろう。

[2] 生成消滅演算子を用いた表現も可能である。5 成分のボソンの生成消滅演算子を  $b_i^\dagger, b_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) としよう。すなわち、この演算子は、交換関係  $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$  を満たすとする。このとき、演算子

$$L^{ab} = \sum_{i,j} b_i^\dagger (T^{ab})_{ij} b_j, \quad (A.14)$$

も、(A.10) と同じ交換関係を満たすことが確かめられる。この生成子を用いるとボーズ演算子を  $SO(5)$  で変換させることができる。

$$\exp\left[i \sum_{a<b} \theta_{ab} L^{ab}\right] b_i \exp\left[-i \sum_{a<b} \theta_{ab} L^{ab}\right] = \left(\exp i \sum_{a<b} \theta_{ab} T^{ab}\right)_{ij} b_j, \quad (A.15)$$

この結果を用いると、 $SO(5)$  の内部対称性を持つボーズ場の量子論が構成できる。また、前章に示した演算子  $\mathbf{n}$  を回転させる演算子  $L_{ab}$  は、フェルミオン演算子で表現した生成子となっている。

[3] スピノル表現と呼ばれる 4 次元表現も可能である。 $SO(5)$  の変換で不変な 2 次形式、 $x_1^2 + \dots + x_5^2$  を次のように因数分解することを考えよう。

$$x_1^2 + \dots + x_5^2 = (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_5 x_5)^2, \quad (A.16)$$

右辺を展開してみるとわかるが、この関係が成立するためには、 $\gamma_i$  は次のような反交換関係を満たさなければならない。

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij}. \quad (A.17)$$

すなわち、 $\gamma_i$  は通常の数ではない。このような関係を満たす代数系をクリフォード代数と呼ぶ。(A.17) を満たす  $\gamma_i$  は、例えば、次のような 4 行 4 列の行列で表される。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (A.18)$$

ただし、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  はパウリ行列、 $\sigma_0$  は 2 行 2 列の単位行列である。(A.17) はユニタリー変換で不変であるから、(A.17) に与えられた行列をユニタリー変換して得られる行列も、 $\gamma_i$  に対する表現となっている。また、(A.16) が  $SO(5)$  の変換に対して不変であることから、(A.2) で与えられる変換に対して、 $\gamma_i$  は

$$\gamma'_i = \sum_{j=1}^5 U_{ij} \gamma_j, \quad (A.19)$$



のように変換しなければならないことがいえる。すなわち、 $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) は  $SO(5)$  の変換に対して、ベクトルとして変換する。この  $\gamma_i$  を用いて交換子

$$T_S^{ab} = \frac{1}{4i} [\gamma_a, \gamma_b], \quad (A.20)$$

を作ると、この  $T^{ab}$  は、 $SO(5)$  のリー代数の交換関係 (A.10) を満たす。このことは、(A.18) の表現を用いて直接確かめることができる。したがって、(A.20) を生成子として作られる 4 行 4 列の行列

$$U_S(\theta_{12}, \dots) = \exp i \sum_{a < b} \theta_{ab} T_S^{ab}, \quad (A.21)$$

は、 $SO(5)$  の 4 次元表現を与える。この表現は、スピノル表現とも呼ばれる。また、この表現に従って変換する 4 成分の量  $\psi_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ )

$$\psi'_i = \sum_j [U_S(\theta_{12}, \dots)]_{ij} \psi_j, \quad (A.22)$$

を、スピノルと呼ぶ。さらに、 $U_S$  を用いた相似変換

$$\gamma'_a = U_S(\theta_{12}, \dots) \gamma_a U_S^{-1}(\theta_{12}, \dots), \quad (A.23)$$

は、(A.19) の  $SO(5)$  の回転で得られるものに一致することも確かめられる。

このスピノル表現を用いると、 $SO(5)$  の内部対称性を持つフェルミオン場を構成できる。4 成分のフェルミオンからなるフェルミオン場の演算子  $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}, \quad (A.24)$$

を考えよう。ここで  $\psi_a(x)$  は、反交換関係

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\} \delta(t_x - t_y) = i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta^4(x - y), \quad (A.25)$$

を満たすとする。このフェルミオン場を  $SO(5)$  で変換させる生成子は

$$L^{ab} = \int d^3x \Psi^\dagger(x) T_S^{ab} \Psi(x), \quad (A.26)$$

となる。実際、次の関係

$$\exp\left[i \sum_{a < b} \theta_{ab} L^{ab}\right] \psi_\alpha(x) \exp\left[-i \sum_{a < b} \theta_{ab} L^{ab}\right] = \left(\exp\left[i \sum_{a < b} \theta_{ab} T_S^{ab}\right]\right)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x), \quad (A.27)$$

が成立することから証明される。ここで、 $SO(5)$  の回転に対して、演算子  $\Psi^\dagger(x)T_S^{ab}\Psi(x)$  はテンソルとして、また、 $\Psi^\dagger(x)\gamma_a\Psi(x)$  は、ベクトルとして変換することを注意しておく。

スピン 1/2 の非相対論的フェルミオン場は、通常 doublet field  $(\psi_\uparrow(x), \psi_\downarrow(x))$  として表現される。それでは、 $SO(5)$  の内部対称性を持つ 4 成分のフェルミオン場にどのような物理的意味を付与できるか考えてみよう。そのためには、生成子の固有状態を考えてみればよい。交換関係 (A.10) を見ると、可換である生成子が存在することがわかる。例えば、 $T^{12}$  と  $T^{45}$  は明らかに可換である。

$$[T^{12}, T^{45}] = 0. \quad (A.28)$$

しかし、この 2 つの生成子の双方と交換する生成子は、残りの生成子の中に存在しない<sup>4)</sup>。この結果は、 $SO(5)$  の 10 個の生成子のうち 2 つが同時対角化可能であることを意味している。 $T^{12}$  と  $T^{45}$  をベクトル表現とスピノル表現の場合をそれぞれ対角化してみると、例えば

$$T^{45} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{12} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A.29)$$

$$T_S^{45} = \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & -1/2 & \\ & & & -1/2 \end{pmatrix}, \quad T_S^{12} = \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & -1/2 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & -1/2 \end{pmatrix}, \quad (A.30)$$

のようになる。すなわち、生成子の固有値は、図 1 に示すように 2 次元ベクトルとなる<sup>4)</sup>。

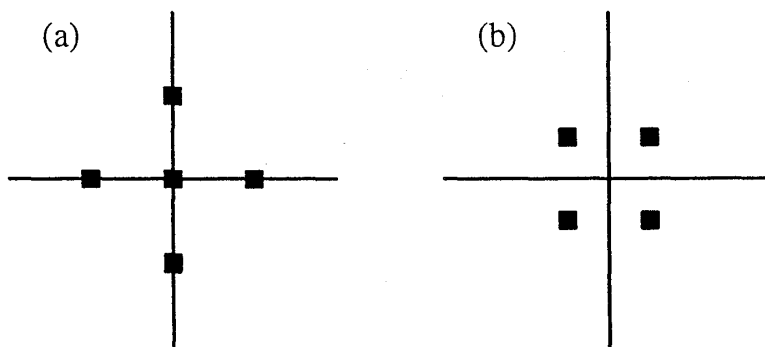


Fig.2 ウェイト図 (a) ベクトル表現 (b) スピノル表現

この事実から、(A.24) で定義されるフェルミオン場は、2 種類の量子数で指定される内部自由度を持つことが結論される。ここで、 $T^{12} = S^3, T^{23} = S^1, T^{31} = S^2$  と書くと、 $S^i$

( $i = 1, 2, 3$ ) に対して (A.10) は閉じた交換関係

$$[S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk}S^k, \quad (\text{A.31})$$

を与える ( $\epsilon_{ijk}$  は完全反対称テンソルで  $\epsilon_{123} = 1$ )。すなわち、 $S^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は部分代数を作っていることになる。また、(A.31) の交換関係は  $SO(3)$  のリー代数の交換関係に一致していることから、 $T_S^{12}$  の固有値  $\pm 1/2$  をスピン量子数と解釈することが可能となる。従って、 $SO(5)$  に従うフェルミオン場は、スピン  $1/2$  であり、その他に新しいもう 1 つの自由度を持たせることが可能なことが結論される。この新しい自由度が何であるかは、具体的なモデルに依存する。通常の電子系でも、次のようなスピノル

$${}^t\Psi_{\mathbf{p}} = (c_{\mathbf{p}\uparrow}, c_{\mathbf{p}\downarrow}, \phi_{\pi}(\mathbf{p})c_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q},\uparrow}^{\dagger}, \phi_{\pi}(\mathbf{p})c_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q},\downarrow}^{\dagger})$$

は、 $SO(5)$  のスピノルとして変換することを Robello et al は示している<sup>6)</sup>。ただし、 $\phi_{\pi}(\mathbf{p}) = \text{sgn}(\cos p_x - \cos p_y)$  である。

クリフォード代数で定義した、5 成分を持つ擬スピン演算子  $S^a = 1/2\gamma^a$  を用いて Heisenberg モデルを拡張すると、 $S=1/2$  の反強磁性 Heisenberg モデルと超伝導の London モデルが統一できることが示されている<sup>7)</sup>。この場合のモデルハミルトニアンは

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} JS_i \cdot S_j - \sum_i g\mu_B \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{S}_i - \sum_{\langle ij \rangle} \left[ \cos A_{ij} (S_i^4 S_j^4 + S_i^5 S_j^5) + \sin A_{ij} (S_i^5 S_j^4 - S_i^4 S_j^5) \right]$$

で与えられる。ただし、 $\mathbf{S}_i = (S_i^1, S_i^2, S_i^3)$  は、スピン空間の擬スピン演算子、 $S_i^4, S_i^5$  は、超伝導空間の擬スピン演算子である。また、 $A_{ij}$  はベクトルポテンシャルである。ホールドーピングの効果は、このハミルトニアンに、3 サイト項と化学ポテンシャル項

$$\sum_i \sum_{\delta, \eta} J_2 T_{i+\delta}^{45} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{j+\eta} - \sum_i \mu T_i^{45}$$

を加えると、ホールドーピングの相図を再現できることが示されている。

- 1) コンパクトとは、この場合、パラメーター  $\theta_{ab}$  の集合が閉集合となっている場合をいう。今の場合、 $0 \leq \theta_{ab} \leq \pi$ 、ないし、 $0 \leq \theta_{ab} \leq 2\pi$  にとることができるので、閉集合になっている。
- 2)  $U(\theta_{ab})$  が、 $\theta_{ab}$  の連続関数であれば良い。
- 3) この表現が交換関係 (A.10) を満たしていることは、ヤコビの恒等式  $[X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] + [X_c, [X_a, X_b]] = 0$  に代入してみればわかる。

- 4)  $SO(5)$  が rank 2 のリー代数を持つことを意味している。この場合の  $T^{12}$  と  $T^{45}$  を、カルタン部分代数と呼ぶ。
- 5) 固有値 (ウェイト) は、最高ウェイト (ベクトル表現では、 $(1,0)$ 、スピノル表現では  $(1/2, 1/2)$ ) から、単純ルート  $(1, -1), (0, 1)$  を successive に引いていくと求まる構造になっている。単純ルートを与える 2 つの昇降演算子は

$$E_1 = (T^{13} + iT^{23})/\sqrt{2}$$

$$E_2 = (T^{15} - iT^{25} - T^{24} - iT^{14})/2$$

である。

6) S. Robello et al, PRL

7) T.Koyama, J. Phys. Soc. Jpn, 66 (1997) 4051.